MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas de Melilla

CIUDAD AUTÓNOMA DE MELILLA
Consejería de Educación, Juventud y Deportes

Universidades Públicas de Andalucía	**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA** **PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD** CURSO 2016-2017	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

Ejercicio 1: **2.5 puntos**

a) 0.3 por la justificación de cada operación irrealizable; 0.3 por justificar la realizable y 0.3 por ejecutarla.
b) Hasta 1 punto.

Ejercicio 2: **2.5 puntos**

a) 0.7 por imponer las condiciones, 0.3 por hallar los parámetros.
b) 0.5 por los puntos de corte, 0.5 por monotonía y extremos y 0.5 por la gráfica.

Ejercicio 3: **2.5 puntos**

a) Hasta 1 punto.
b) Hasta 0.75 puntos.
c) Hasta 0.75 puntos.

Ejercicio 4: **2.5 puntos**

a) 0.25 por el cálculo de la media muestral, 0.25 por el percentil, 1 punto por la obtención del intervalo.
b) 0.25 por la identificación del error, 0.25 por el percentil, 0.5 por n.

OPCIÓN B

Ejercicio 1: **2.5 puntos**

a) Hasta 0.8 puntos.
b) Hasta 0.25 puntos.
c) 0.6 por los vértices, 0.6 por la determinación del máximo y el mínimo.
d) Hasta 0.25 puntos.

Ejercicio 2: **2.5 puntos**

a) Hasta 1 punto.
b) 0.5 por cada recta tangente, 0.5 por el resto.

Ejercicio 3: **2.5 puntos**

a) Hasta 1.25 puntos.
b) Hasta 1.25 puntos.

Ejercicio 4: **2.5 puntos**

a) Hasta 1.25 puntos.
b) Hasta 1.25 puntos.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **(1.5 puntos)** Justifique cuáles de las siguientes operaciones pueden realizar y, en tal caso, calcule el resultado:

$$A^2 \qquad A - B \qquad A \cdot B \qquad A \cdot B^t$$

a[1]) $A^2 \Rightarrow$ La matriz A tiene dos filas y tres columnas $A_{2\times3}$ y para que se puedan multiplicar las matrices el número de columnas de la primera ha de coincidir con el número de filas de la segunda.

$A^2 \Rightarrow \quad A_{2\times3} \cdot A_{2\times3} \quad \Rightarrow$ Por tanto no se puede realizar esta operación.

a[2]) $A - B \quad \Rightarrow$ Para poder restar dos matrices han de ser del mismo orden, por tanto esta operación no se puede realizar ya que $A_{2\times3}$ y $B_{3\times2}$

a[3]) $A \cdot B \quad \Rightarrow$ Esta operación si se puede realizar por lo dicho en el apartado a[1])

$$A_{2\times3} \cdot B_{3\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a[4]) $A \cdot B^t \quad \Rightarrow \quad A_{2\times3}$ y $B_{3\times2}$, la transpuesta de la matriz B, $B^t_{2\times3}$, luego esta operación no se puede realizar. $A_{2\times3} \cdot B^t_{2\times3}$

b) **(1 punto)** Halle la matriz X tal que $A^t + B \cdot X = 3B$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Para que pueda producir este producto $B \cdot X$ la matriz X ha de ser de orden 2×2 luego $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}_{2\times2}$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_3 = -1 \\ x_4 = 3 \\ x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 2 \end{array}\right\} \text{Luego la matriz } X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$.

a) **(1 punto)** Halle a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abscisa $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = -2$.

Si la función tiene un mínimo en $x = -1$ la primera derivada de la función en ese punto es nula, por tanto

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad f'(-1) = 0$$

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2a(-1) + b = 3 - 2a + b = 0$$

Como la función tiene un punto de inflexión en $x = -2$, la segunda derivada de la función en ese punto es nula, por tanto

$$f''(x) = 6x + 2a \qquad f''(-2) = -12 + 2a = 0 \;\Rightarrow\; 2a = 12 \;\Rightarrow\; a = 6$$

$$\left.\begin{array}{r} 3 - 2a + b = 0 \\ a = 6 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; 3 - 12 + b = 0 \;\Rightarrow\; b = 12 - 3 = 9 \;\Rightarrow\; b = 9$$

b) **(1.5 puntos)** Para $a = 6$ y $b = 9$, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función.

Para estudiar la monotonía de la función tenemos que analizar la primera derivada.

En los puntos donde la primera derivada se anula tendremos los extremos relativos

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 + 12x + 9 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 4x + 3 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{array}{l} \nearrow -1 \\ \searrow -3 \end{array}$$

<u>Trabajaremos el crecimiento o decrecimiento en los tres intervalos siguientes</u>:

$(-\infty,-3) \quad (-3,-1) \quad (-1,+\infty)$

Tomamos valores de los distintos intervalos

Para $x=-4 \quad \Rightarrow \quad f'(-4)=3\cdot(-4)^2+12(-4)+9=9>0 \quad \Rightarrow$ la función f es estrictamente ⇗ en el intervalo $(-\infty,-3)$

Para $x=-2 \quad \Rightarrow \quad f'(-2)=3\cdot(-2)^2+12\cdot(-2)+9=-3<0 \quad \Rightarrow$ la función f es estrictamente decreciente en el intervalo $(-3,-1)$ ⇘

Para $x=0 \quad \Rightarrow \quad f'(0)=3\cdot 0^2+12\cdot 0+9=9>0 \quad \Rightarrow \quad f$ es estrictamente creciente ⇗ en el intervalo $(-1,+\infty)$

<u>Cortar con los ejes</u>

Para $x=0 \Rightarrow f(0)=0^3+6\cdot 0^2+9\cdot 0=0 \Rightarrow (0,0)$

Para $f(x)=0 \Rightarrow x^3+6x^2+9x=0 \Rightarrow x(x^2+6x+9)=0 \Rightarrow x(x+3)^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=0$ y $x=-3$

Son dos puntos de corte, el $(0,0)$ y $(-3,0)$

<u>Valores de la función en los máximos y mínimos relativos</u>

Máx. Relat. Para $x=-3 \Rightarrow f(-3)=(-3)^3+6\cdot(-3)^2+9\cdot(-3)=0$

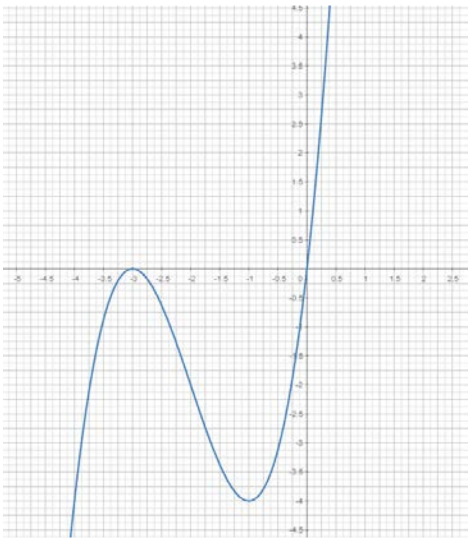
Mín. Relat. Para $x=-1 \Rightarrow f(-1)=(-1)^3+6\cdot(-1)^2+9\cdot(-1)=-4$

El comportamiento de la función en el $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3+6x^2+9x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3+6x^2+9x)=\lim_{x\to-\infty}(-\infty)^3=-\infty$$

Figura 1. Representación de la función $f(x)=x^3+6x^2+9x$



EJERCICIO 3

Supongamos que le 20% de los votantes de Trump apoya la construcción del muro en la frontera con México y que solo el 5% de los que no lo votaron la apoya. En un grupo formado por 5000 votantes de Trump y 10000 estadounidenses que no lo votaron se elije un persona al azar.

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que ésta apoye la construcción del muro?

Solución:

$$V = votante\ de\ Trump$$

$$V^c = no\ votante\ de\ Trump$$

$$P(V) = \frac{5000}{15000} = \frac{1}{3} \qquad P(V^c) = \frac{2}{3}$$

$$M = apoya\ la\ construcción\ del\ muro.$$

$$M^c = no\ apoya\ la\ construcción\ del\ muro.$$

$$P\left(\frac{M}{V}\right) = 20\% = 0{,}2 \qquad P\left(\frac{M}{V^c}\right) = 5\% = 0{,}05$$

Aplicaremos el Teorema de la Probabilidad Total.

$$P(M) = P(V) \cdot P\left({}^{M}/_{V}\right) + P(V^c) \cdot P\left({}^{M}/_{V^c}\right) = {}^{1}/_{3} \cdot 0{,}2 + {}^{2}/_{3} \cdot 0{,}05 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (0{,}2 + 0{,}1) = \frac{0{,}3}{3} = 0{,}1$$

b) **(0.75 puntos)** Si la persona elegida apoya la construcción del muro, ¿cuál es la probabilidad de que no haya votado a Trump?

Tenemos que calcular la siguiente probabilidad condicional

$$P\left({}^{V^c}/_{M}\right)$$

Para ello aplicamos el Teorema de Bayes

$$P\left({}^{V^c}/_{M}\right) = \frac{P(V^c \cap M)}{P(M)} = \frac{P(V^c) \cdot P\left({}^{M}/_{V^c}\right)}{P(M)} = \frac{\left({}^{2}/_{3}\right) \cdot (0{,}05)}{0{,}1} = \frac{2 \cdot 0{,}05}{0{,}3} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea votante de Trump o apoye la construcción del muro.

$$P(V \cup M) = P(V) + P(M) - P(V \cap M) = P(V) + P(M) - P(V) \cdot P\left({}^{M}/_{V}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + 0{,}1 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}2 = \frac{1}{3} + 0{,}1 - \frac{0{,}2}{3} = 0{,}1 + \frac{0{,}8}{3} = \frac{0{,}3 + 0{,}8}{3} = \frac{1{,}1}{3} = 0{,}366\ldots$$

EJERCICIO 4

El tiempo de vida de una determinada especie de tortuga es una variable aleatoria que sigue una ley Normal de desviación típica 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen los siguientes valores:

46 38 59 29 34 32 38 21 44 34

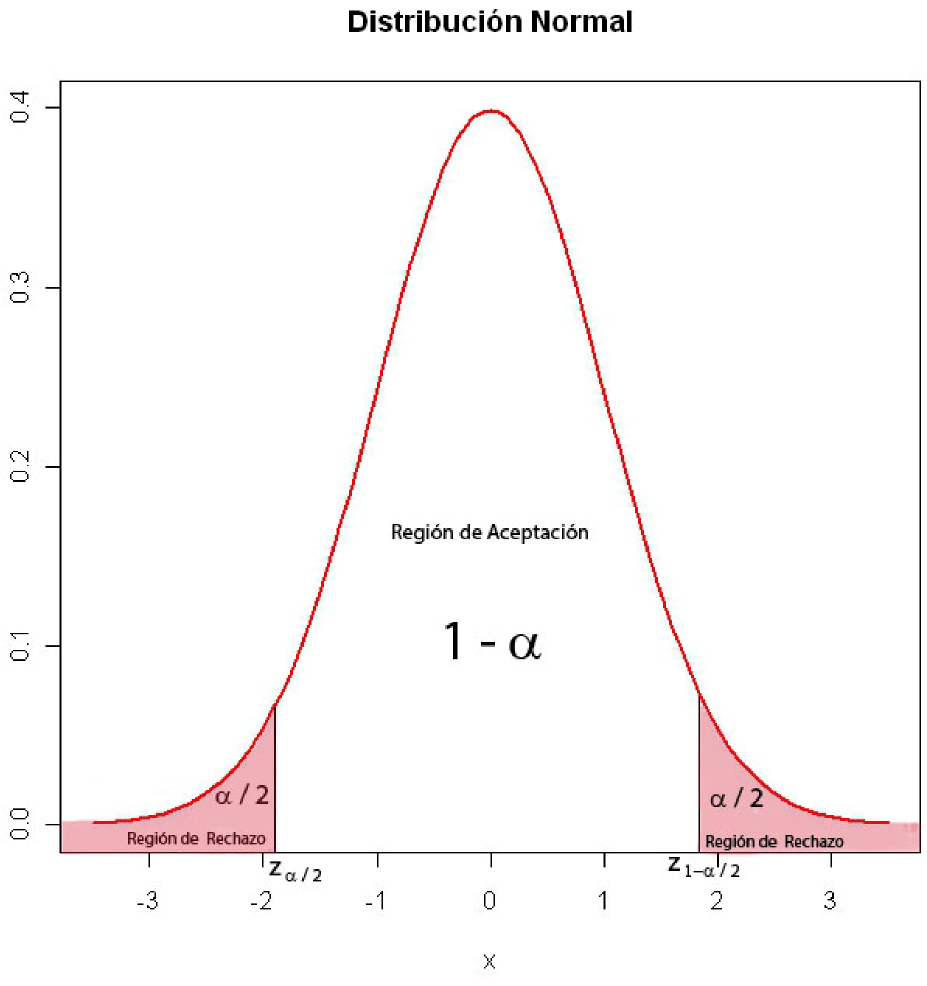
a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza, al 95%, para la vida de dicha especie de tortugas.

Para la media de la población μ, el estimador es la media muestral $\bar{X}$ que sigue una ley normal, $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$X \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El intervalo de confianza para la estimación de la media sería:

$$Ic\ (\mu) = \left(\bar{X} - Z_{\propto/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{1-\propto/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$



Tenemos $\sigma = 10$

$$\bar{X} = \frac{(46 + 38 + 59 + 29 + 34 + 32 + 38 + 21 + 44 + 34)}{10} = 37{,}5$$

$$1{-}\propto = 95\% = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad nivel\ de\ confianza$$

$$\propto = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \propto/2 = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$$

$$P\left(Z \leq Z_{1-\propto/2}\right) = 1 - \propto/2 = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$$

Buscamos en las tablas de la $N(0,1)$ y la probabilidad 0,975 corresponde al valor $1{,}95 \quad \Rightarrow$ $Z_{1-\propto/_2} = 1{,}96$

$$Ic\ (\mu) = \left(37{,}5 - 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}}, 37{,}5 + 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}}\right) = (31{,}301, 43{,}698)$$

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error de estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 98%

$\nabla = 10$ El error $E = Z_{1-\propto/_2} \cdot \frac{\nabla}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad n = \left(\frac{Z_{1-\propto/_2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad E = 5\ años$

$1 - \propto = 98\% = 0{,}98 \quad \Rightarrow \quad nivel\ de\ confianza$

$\propto = 1 - 0{,}98 = 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad {}^{\propto}/_2 = {}^{0{,}02}/_2 = 0{,}01$

$P\left(Z \leq Z_{1-\propto/_2}\right) = 1 - {}^{\propto}/_2 = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 \quad \rightarrow$ que corresponde al valor

$2{,}33 = Z_{1-\propto/_2}$ en la $N(0,1)$

$$n = \left(\frac{2{,}33 \cdot 10}{5}\right)^2 = 21{,}71$$

Luego el tamaño mínimo de la muestra ha de ser de 22 tortugas.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) **(0.8 puntos)** Representa el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

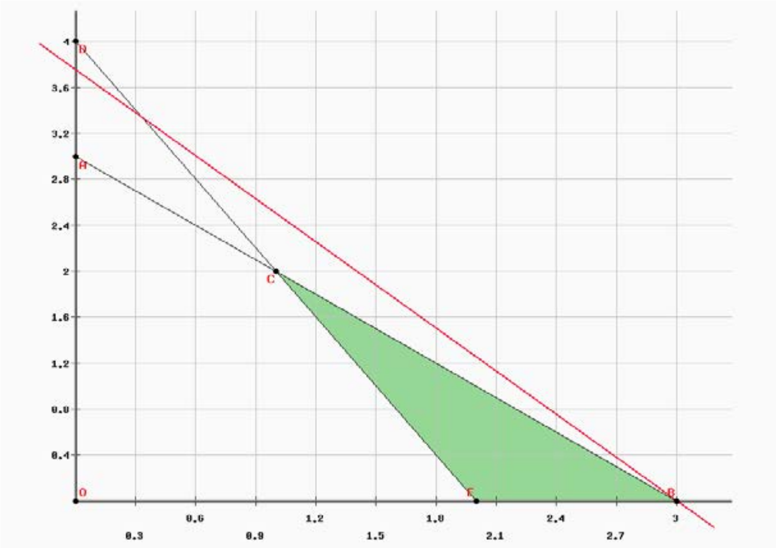
$$\mathrm{x}+\mathrm{y} \leq 3 \qquad 2\mathrm{x}+\mathrm{y} \geq 4 \qquad \mathrm{y} \geq -1$$

$\mathrm{x}+\mathrm{y} \leq 3 \quad \mathrm{x}+\mathrm{y} = 3$ $\qquad$ $2\mathrm{x}+\mathrm{y} \geq 4$ $\qquad$ $\mathrm{y} \geq -1$

x	y
0	3
3	0

x	y
0	3
3	0

Primero dibujamos las rectas $\mathrm{x}+\mathrm{y}=3$, $2\mathrm{x}+\mathrm{y}=4$ e $\mathrm{y}=-1$ y luego delimitamos el recinto que representan las desigualdades.



El recinto es un polígono convexo cerrado, concretamente un triángulo con los tres vértices, C, B, E.

Cada recta divide a la superficie en dos partes, para ver cuál de ellas representa la desigualdad tomamos un punto y vemos si la verifica.

b) **(0.25 puntos)** Razone si el punto (2, 1) pertenece al recinto anterior.

Hemos de comprobar que este punto verifica las tres inecuaciones.

$x+y \leq 3 \quad \Rightarrow \quad 2+1 \leq 3 \qquad si\ la\ verifica.$

$2x+y \geq 4 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 2+1 \geq 4 \quad si\ la\ verifica.$

$y \geq -1 \quad \Rightarrow \quad 1 \geq -1 \quad si\ la\ verifica.$

Podemos asegurar que el punto (2, 1) pertenece al recinto.

c) **(1.25 puntos)** Obtenga los vértices del recinto y los valores mínimo y máximo de la función $F(x,y)=5x+4y$ en ese recinto, indicando en qué puntos se alcanzan.

Para calcular los vértices calcularemos los puntos de corte de las rectas, dos a dos, o lo que es lo mismo, resolveremos los sistemas de ecuaciones dos a dos.

$$\text{vértice } A \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} x+y=3 \\ \underline{-2x-y=-4} \\ -x=-1 \Rightarrow x=1 \end{array}$$

$1+y=3 \Rightarrow y=3-1=2$

$A(1,2)$

$$\text{vértice } B \begin{cases} 2x+y=4 \\ \quad y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 2x+y=4 \\ \underline{-y=1} \\ 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}=2{,}5 \end{array}$$

$B(2{,}5,-1)$

$$\text{vértice } C \begin{cases} x+y=3 \\ \quad y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} x+y=3 \\ \underline{-y=1} \\ x=4 \end{array}$$

$C(4,-1)$

Calculamos ahora los puntos donde se alcanzan los máximos y mínimos y el valor de estos en la función $F(x,y)=5x+4y$.

Sabemos que la función alcanza su máximo y mínimo en los vértices del polígono convexo cerrado (Teorema Fundamental de la Programación lineal).

Por tanto:

$F(x,y)=5x+4y$

$Vértice\ A\ (1,2) \quad \Rightarrow \quad F(1,2)=5\cdot 1+4\cdot 2=13$

$Vértice\ B\ (2{,}5,-1) \quad \Rightarrow \quad F(2{,}5,-1)=5\cdot 2{,}5+4\cdot(-1)=12{,}5-4=8{,}5$

$Vértice\ C\ (4,-1) \quad \Rightarrow \quad F(4,-1)=5\cdot 4+4\cdot(-1)=20-4=16$

El máximo absoluto de la función F en este polígono convexo es 16 y se alcanza en el vértice $C\ (4,-1)$ y el mínimo absoluto es 8,5 y se alcanza en el vértice $B\ (2{,}5,-1)$.

d) **(0.25 puntos)** Razone si la función F puede alcanzar el valor 9 en el recinto anterior.

El valor 9 se encuentra comprendido entre los valores mínimo y máximo de F en el recinto, por tanto, sí puede alcanzarlo: $8{,}5 \leq 9 \leq 16$

EJERCICIO 2

Se consideran las siguientes funciones $f(x) = \frac{5x-16}{x}$ y $g(x) = x^2$.

a) **(1 punto)** Determine la abscisa del punto donde se verifique que $f'(x) = g'(x)$.

$$f(x) = \frac{5x-16}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{5 \cdot x - (5x-16) \cdot 1}{x^2} = \frac{16}{x^2}$$

$$g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 2x$$

$$\frac{16}{x^2} = 2x \quad \Rightarrow \quad 16 = 2x^3 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{8} = 2$$

La abscisa donde $f'(x) = g'(x)$ es $x = 2$

b) **(1.5 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada función en el punto de abscisa $x = 2$ y determine el punto de corte de ambas rectas tangentes, si existe.

La recta tangente en $x = 2$ es la siguiente:

$$y - f'(2) = f'(2) \cdot (x-2)$$

$$f(2) = \frac{5 \cdot 2 - 16}{2} = \frac{10-16}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$f'(x) = \frac{16}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(2) = \frac{16}{4} = 4$$

Luego la recta tangente es $y - (-3) = 4\,(x-2) \quad \Rightarrow \quad y + 3 = 4x - 8 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad y = 4x - 8 - 3 \quad \Rightarrow \quad y = 4x - 11$$

Veamos cual es la recta tangente en $x = 2$ a la función g.

$$y - g(2) = g'(2)(x-2)$$

$$g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad g(2) = 2^2 = 4$$

$$g'(x) = \frac{16}{x^2} \quad \Rightarrow \quad g'(2) = \frac{16}{4} = 4$$

$$y - 4 = 4\,(x-2) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = 4x - 8 \quad \Rightarrow \quad y = 4x - 8 + 4 = 4x - 4$$

$y = 4x - 4$ es la recta tangente a $g(x) = x^2$ en $x = 2$.

Veamos si se cortan:

$$y = 4x - 11$$

$$y = 4x - 4$$

Las rectas son paralelas ya que tienen la misma pendiente, por tanto, no se cortan.

EJERCICIO 3

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 bolas del otro color. A continuación se extrae una segunda bola.

a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.

Llamaremos:

$R_1 = Primera\ bola\ extraida\ sea\ roja$

$R_2 = Segunda\ bola\ extraida\ sea\ roja$

$V_1 = Primera\ bola\ extraida\ sea\ verde$

$V_2 = Segunda\ bola\ extraida\ sea\ verde$

Sabemos que $P\ (R_1) = {}^5/_8$

Al sacar una boja roja se introducen dos de otro color, es decir, dos verdes. Luego en la urna tendremos 4 bolas rojas y 5 verdes; luego $P\left({}^{R_2}/_{R_1}\right) = \frac{4}{9}$ y $P\left({}^{V_2}/_{R_1}\right) = \frac{5}{9}$

La $P(V_1) = {}^3/_8$, si sacamos una bola verde por primera vez, hemos de añadir 2 bolas de otro color, es decir, de color rojo, luego tendremos 7 bolas rojas y 2 verdes en la urna, por tanto $P\left({}^{R_2}/_{V_1}\right) = \frac{7}{9}$ y $P\left({}^{V_2}/_{V_1}\right) = \frac{2}{9}$

Aplicando el teorema de la Probabilidad Total tenemos:

$$P(V_2) = P(R_1) \cdot P\left({}^{V_2}/_{R_1}\right) + P(V_1) \cdot P\left({}^{V_2}/_{V_1}\right) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{9} = \frac{31}{8 \cdot 9} = \frac{31}{72} = 0{,}4305$$

b) **(1.25 puntos)** Halle la probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

Aplicamos el Teorema de Bayes

$$P\left({}^{R_1}/_{R_2}\right) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_1) \cdot P\left({}^{R_2}/_{R_1}\right)}{P(R_2)} = \frac{{}^5/_8 \cdot {}^7/_9}{{}^{41}/_{72}} = \frac{35}{41} = 0{,}85366$$

$$P(R_2) = P(R_1) \cdot P\left({}^{R_2}/_{R_1}\right) + P(V_1) \cdot P\left({}^{R_2}/_{V_1}\right) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{9} = \frac{20 + 21}{72} = \frac{41}{72}$$

O también:

$$P(R_2) = 1 - P(V_2) = 1 - \frac{31}{72} = \frac{41}{72}$$

EJERCICIO 4

En una muestra, elegida al azar, de 100 estudiantes de una Universidad, se ha observado que 25 desayunan en la cafetería del campus.

a) **(1.25 puntos)** Determine, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería.

Tenemos que estimar la proporción poblacional P, por tanto, utilizaremos es estimador "proporción muestral $\hat{P}$, que sigue una $N\left(\hat{P}, \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right)$

El intervalo de confianza para estimar la proporción es el siguiente:

$$I_c(p) = \left(\hat{p} - Z_{1-\propto/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + Z_{1-\propto/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

$n = 100 \qquad \hat{p} = \frac{25}{100} = 0{,}25 \qquad \hat{q} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

Nivel de confianza $1-\propto = 95\% = 0{,}95 \;\Rightarrow\; \propto = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \;\Rightarrow\; \frac{\propto}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$

$$P\left(Z \leq z_{1-\propto/2}\right) = 1 - \propto/2 = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$$

Buscamos en las tablas de la $N\,(0,1)$ y la probabilidad 0,975 corresponde al valor $Z_{1-\propto/2} = 1{,}96$.

El intervalo de confianza será:

$$I_c = \left(0{,}25 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{100}}, 0{,}25 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{100}}\right) = (0{,}1651, 0{,}3345) \cong$$

$$\cong (16{,}51\%, 33{,}45\%)$$

b) **(1.25 puntos)** Si la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería del campus en una muestra aleatoria es de 0.2, y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.03, con un nivel de confianza del 92.5% calcule el tamaño mínimo de la muestra.

$\hat{p} = 0{,}2 \qquad \hat{q} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 \qquad E = error \leq 0{,}03$

Nivel de confianza $1-\propto = 92{,}5\% = 0{,}925 \;\Rightarrow\; \propto = 1 - 0{,}925 = 0{,}075 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \propto/2 = {}^{0{,}075}/_{2} = 0{,}0375$$

$$P\left(Z \leq z_{1-\propto/2}\right) = 1 - \propto/2 = 1 - 0{,}0375 = 0{,}9625$$

Buscamos esta probabilidad en las tablas de la $N\,(0,1)$ y corresponde al valor

$$Z_{1-\propto/2} = 1{,}78$$

$$E = Z_{1-\propto/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\left(Z_{1-\propto/2}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}{E^2} = \frac{(1{,}78)^2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}{(0{,}03)^2} = 563{,}27$$

El tamaño mínimo de la muestra ha de ser de 564 alumnos.