MATEMÁTICAS II

Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas de Melilla

CIUDAD AUTÓNOMA DE MELILLA
Consejería de Educación, Juventud y Deportes

Universidades Públicas de Andalucía	**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA** **PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A** **LA UNIVERSIDAD** CURSO 2016-2017	MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CRITERIOS GENERALES.

- Los ejercicios deben realizarse atendiendo a los estándares del bloque 1 citado en los comentarios del Documento de Orientación de Matemáticas II, valorándose el grado de cumplimiento común máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio.
- La mera descripción del planteamiento, sin que se lleve a cabo de manera efectiva la resolución, no es suficiente para obtener una valoración completa del ejercicio.
- En los ejercicios en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.
- Los errores cometidos en un apartado, por ejemplo en el cálculo del valor de un cierto parámetro, no se tendrán en cuenta en la calificación de los desarrollos posteriores que puedan verse afectados, siempre que resulten de una complejidad equivalente.
- Los errores en las operaciones aritméticas elementales se penalizarán con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio.
- Si se realizan ejercicios de las dos opciones, sólo se evaluarán los ejercicios de la misma opción que el primero que aparezca físicamente en el papel de examen.

CRITERIOS ESPECÍFICOS PARA ESTE MODELO. La evaluación se realizará según el desglose de las puntuaciones que se hace a continuación. Si algún apartado no se menciona específicamente, su puntuación es la que figura en el enunciado del ejercicio correspondiente. Cuando se dice: “x puntos por A”, hay que interpretar que se deben conceder x puntos si lo que se dice en la frase A está hecho o estudiado correctamente, incluyendo la justificación oportuna. Cuando se dice "planteamiento" se refiere al proceso seguido por el/la estudiante que, de no cometer errores, le llevará a la solución.

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Hasta 1,5 puntos por obtener una función a optimizar en una variable. Hasta 0,25 puntos por justificar que existe un mínimo.

Ejercicio 2.- (a) [0,75 puntos] Hasta 0,5 puntos por los puntos de corte. **(b) [0,75 puntos]** Lo indicado. (c) [1 punto] Hasta 0,5 puntos por la primitiva y hasta 0,25 puntos por aplicar la regla de Barrow.

Ejercicio 3.- (a) [1 punto] Hasta 0,5 puntos si calcula el determinante de $A+\lambda I$. **(b) [1,5 puntos]** Hasta 1 punto por resolver el sistema.

Ejercicio 4.- (a) [1,25 puntos] (b) [1,25 puntos] Hasta 0,75 puntos por el planteamiento en cada apartado.

Opción B

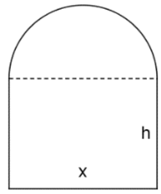
Ejercicio 1.- (a) [1 punto] Hasta 0,25 puntos por justificar que no hay asíntota horizontal. Hasta 0,5 puntos por el cálculo de la asíntota oblicua. **(b) [1,5 puntos]** Hasta 0,5 puntos por el cálculo de la derivada. Hasta 0,5 puntos por el cálculo de los extremos.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Hasta 0,75 puntos por aplicar el cambio de variable. Hasta 0,5 puntos por la división de polinomios. Hasta 0,75 puntos por el cálculo de primitivas en t.

Ejercicio 3.- (a) [1,5 puntos] Hasta 0,75 puntos por plantear correctamente el sistema y hasta 0,5 puntos por justificar que la última información no es independiente de las anteriores. ***(b) [1 punto]*** Hasta 0,25 puntos por la nueva ecuación. Hasta 0,25 puntos por dar el precio con sus unidades.

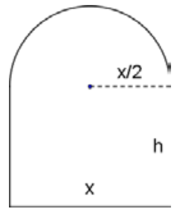
Ejercicio 4.- (a) [1,25 puntos] (b) [1,25 puntos] Hasta 0,75 puntos por el planteamiento en cada apartado.

OPCIÓN A



Ejercicio 1.-(2,5 puntos) Se quiere hacer una puerta rectangular coronada con un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados.

Si es posible, determina la base x para que el perímetro sea mínimo.



Consideramos la figura con los siguientes datos:

La longitud de la semicircunferencia es $\frac{2\pi r}{2} = \frac{2\pi\frac{x}{2}}{2} = \frac{\pi x}{2}$

y el área del semicírculo es $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi x^2}{8}$

En tal caso, la función a optimizar es la función perímetro $P = 2h + x + \frac{\pi x}{2}$

El área total sería $16 = Área\ rectágulo + Área\ semicírculo = xh + \frac{\pi x^2}{8}$

Despejando h obtenemos que $h = \frac{16}{x} - \frac{\pi x}{8}$ y sustituyendo en la función perímetro

obtenemos que $P(x) = 2h + x + \frac{\pi x}{2} = 2\left(\frac{16}{x} - \frac{\pi x}{8}\right) + x + \frac{\pi x}{2} = \frac{32}{x} - \frac{\pi x}{4} + x + \frac{\pi x}{2}$

Sabemos que si f´(a)=0 y f´(a)>0 entonces x=a es un mínimo relativo.

Derivando la función e igualando a cero obtenemos que

$\frac{-32}{x^2} - \frac{\pi}{4} + 1 + \frac{\pi}{2} = \frac{-32}{x^2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 0$, y despejando x obtenemos que $x = \pm\sqrt{\frac{128}{4+\pi}}$ç

Como x es positiva ya que es una longitud entonces $x = \sqrt{\frac{128}{4+\pi}}$

Ahora vamos a ver que es un mínimo.

Como $P''(x) = \frac{64}{x^3}$ entonces $P''\left(\sqrt{\frac{128}{4+\pi}}\right) = \frac{64}{\left(\sqrt{\frac{128}{4+\pi}}\right)^3} > 0$ y, por tanto, $x = \sqrt{\frac{128}{4+\pi}}$ metros es el valor que hace mínimo el perímetro.

Ejercicio 2.-Considera la región limitada por las curvas $y=x^2$ e $y=-x^2+4x$

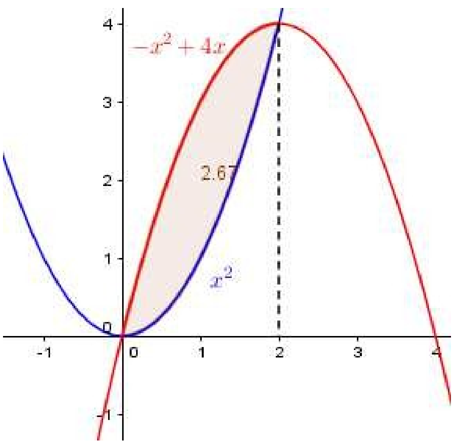
a) **(0,75 puntos)** Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

La gráfica de la función $f(x)=x^2$ es una parábola con las ramas hacia arriba ya que el coeficiente que multiplica a x^2 es positivo, el mínimo se alcanza en la solución de la ecuación f´(x)=2x=0, es decir, x=0. Por tanto, el vértice es V(0,f(0))=(0,0) y además pasa por los puntos (1,f(1))=(1,1) y (-1,f(-1))=(-1,1)

La gráfica de la función $g(x)=-x^2+4x$ es una parábola con las ramas hacia abajo ya que el coeficiente que multiplica a x^2 es negativo, el máximo se alcanza en la solución de la ecuación g´(x)=-2x+4=0, es decir, x=2. Por tanto, el vértice es V(2,g(2))=(2,4) y además pasa por los puntos (0,g(0))=(0,0) y (3,g(3))=(3,3)

Los puntos de corte de ambas curvas se obtienen resolviendo la ecuación f(x)=g(x), es decir, $x^2=-x^2+4x$, lo cual es lo mismo que $2x^2-4x=0$ cuyas soluciones son x=0 y x=2, y de aquí se deduce que los puntos de corte de ambas curvas son (0,0) y (2,4)

Por tanto, el esbozo de la gráfica es:



b) **(0,75 puntos)** Expresa el área como una integral.

Atendiendo al esbozo de la gráfica y sabiendo que el área encerrada por dos funciones es la integral de la diferencia entre la función que está por encima y por debajo cuyos límites de integración serán las abscisas de los puntos de corte de ambas gráficas obtenemos que:

Área$=\int_0^2 (g(x)-f(x))dx=\int_0^2(-x^2+4x-x^2)dx=\int_0^2(-2x^2+4x)dx$

c) **(1 punto)** Calcula el área.

Área$=\int_0^2(-2x^2+4x)dx=\left[\frac{-2x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}\right]_0^2=\left(\frac{-2\cdot 2^3}{3}+\frac{4\cdot 2^2}{2}\right)-(0)=\frac{8}{3}u^2$

Ejercicio 3.- Considera $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

a) **(1 punto)** Determina los valores de λ para que la matriz A+ λI no tiene inversa (I es la matriz identidad)

Calculamos la matriz A+ λI

$$A+\lambda I=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1+\lambda & 0\\ 0 & 0 & -2+\lambda\end{pmatrix}$$

y su determinante: det (A+ λI)=$(-2+\lambda)(-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2-4)=(-2+\lambda)(\lambda^2-\lambda-6)$

Entonces det (A+ λI)=0 $\leftrightarrow (-2+\lambda)(\lambda^2-\lambda-6)=0 \leftrightarrow -2+\lambda=0,\ \lambda^2-\lambda-6=0$ y resolviendo ambas ecuaciones obtenemos que λ=2, λ=-2, λ=3

En resumen, si λ=2, λ=-2, λ=3 entonces det(A+ λI)=0 y, por tanto, la matriz A+ λI no tiene matriz inversa.

b) **(1,5 puntos)** Resuelve AX=-3X. Determina, si existe, alguna solución con x=1

Tenemos que resolver la ecuación matricial AX=-3X, lo cual es equivalente a resolver la ecuación matricial 0=AX+3X=(A+3I)X

Aplicando el apartado anterior sabemos que si λ=3 entonces det(A+3I)=0 y por tanto el rango(A+3I)=2. Como rango(A+3I)=2<3=nº de incógnitas entonces tenemos un sistema compatible indeterminado.

Como $A+3I=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y las dos primeras filas son proporcionales entonces podemos descartar alguna de ellas (por ejemplo la segunda fila).

Luego tenemos que $\begin{cases} x-2y=0, & \text{y de aquí se deduce que } x=2y \\ z=0 \end{cases}$

Por tanto, la solución es (x,y,z)=(2a,a,0) donde a es cualquier número real.

En particular, si x=1 entonces y=1/2 z=0

Ejercicio 4.-

Considera el punto P(1,-1,0) y la recta "r" dada por $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2 \\ z=t \end{cases}$

a) **(1,25 puntos)** Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a "r"

Un plano se puede determinar por un punto, el punto A (punto de la recta) y dos vectores independientes: u (vector director de la recta) y el vector AP

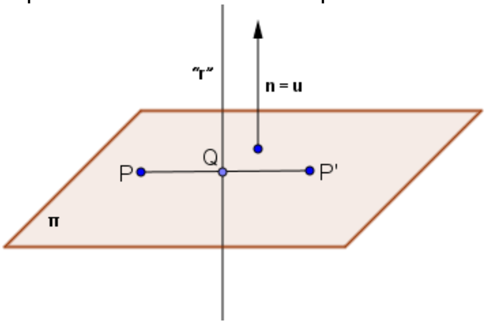
Por ejemplo, A (1,-2,0) es un punto de la recta "r", el vector director de la recta es u=(3,0,1), y el vector AP vendría dado por AP=(1,-1,0)-(1,-2,0)=(0,1,0)

Por tanto, la ecuación del plano expresado en forma vectorial viene dada por:

$\pi \equiv A+\alpha\cdot u+\beta\cdot AP=(1,-2,0)+\alpha(3,0,1)+\beta(0,1,0)$ donde α y β son números reales.

b) **(1,25 puntos)** Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto a "r"

Consideramos el siguiente dibujo:



Vamos a calcular la ecuación del plano perpendicular a la recta "r" por el punto P(1,-1,0) y cuyo vector normal n es el vector director de la recta u=(3,0,1). Por tanto, $\pi^{\circ} \equiv PX * n = (x-1, y+1, z) * (3,0,1) = 3x + z - 3 = 0$ donde $*$ es el producto escalar de dos vectores

Calculamos el punto de corte Q del plano con la recta, sustituyendo la ecuación de la recta en la ecuación del plano, es decir, 3(1+3t)+t-3=0. De aquí se deduce que t=0. Por tanto Q(1+3·0,-2,0)=(1,-2,0)

Entonces Q sería el punto medio del segmento PP´donde P´(x,y,x) es el punto simétrico buscado. Por tanto Q=(1,-2,0)=$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z+0}{2}\right)$

Igualando coordenada a coordenada y resolviendo obtenemos que x=1, y=-3, z=0

Por tanto, el punto P´simétrico de P respecto a la recta "r" es P´(1,-3,0)

OPCIÓN B

Ejercicio 1.-Considera la función f definida por $f(x)=\frac{x^2}{x+1} \quad para\, x \neq 1$

a) **(1 punto)**Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Como el denominador se anula para x=1 entonces la recta x=1 será asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$ entonces la recta x=1 es la asíntota vertical.

Como la función f es una función polinómica donde el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador sabemos que tiene una asíntota oblicua en $+\infty$ y además coincide con la asíntota oblicua en $-\infty$

La forma más rápida de calcular la asíntota oblicua es realizando la división de polinomios entre numerador y denominador. En tal caso, la asíntota oblicua coincide con el cociente de la división.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^2+x & x+1 \\ \quad -x+1 & \\ \qquad 1 & \end{array}$$

Por tanto, la recta y=x+1 es la asíntota oblicua. Ahora vamos a estudiar su posición respecto a f.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}-(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{+\infty}=0^+$ entonces la gráfica de f está por encima de la asíntota en $+\infty$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-\infty}=0^{-+}$ entonces la gráfica de f está por debajo de la asíntota en $-\infty$

b) **(1,5 puntos)**Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f. Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan)

Para estudiar la monotonía de f estudiamos la primera derivada.

$$f´(x)=\frac{2x(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

Entonces de f´(x)=0 se deduce que $x^2-2x=0$ y resolviendo la ecuación obtenemos que x=0,x=2 que son los posibles extremos relativos. Ahora estudiamos el signo de la primera derivada en cada uno de los subintervalos:

f´(-1)>0 f´(1,5)<0 f´(3)>0

Por tanto, f es estrictamente creciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y es estrictamente decreciente en $(0,2)$

Entonces x=0 es un máximo relativo y el valor que alcanza es f(0)=0 y x=2 es un mínimo relativo y el valor que alcanza es f(2)=4

Ejercicio 2.-(2,5 puntos) Calcula $\int_1^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ (sugerencia $t=\sqrt[4]{x}$)

Vamos a resolver el ejercicio realizando el cambio de variable sugerido cambiando a la vez los límites de integración

$$\int_1^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} \overset{(1)}{=} \int_1^{2}\frac{4t^3dt}{\sqrt{t^4}+\sqrt[4]{t^4}}=\int_1^{2}\frac{4t^3dt}{t^2+t}=\int_1^{2}\frac{4t^3dt}{t(t+1)}=\int_1^{2}\frac{4t^2dt}{t+1}\overset{(2)}{=}\int_1^{2}Cociente+$$

$$+\int_1^{2}\frac{Resto}{Divisor}=\int_1^{2}(4t-4)dt+\int_1^{2}\frac{4dt}{t+1}=\left[4\frac{t^2}{2}-4t+4ln|t+1|+C\right]_1^2=$$

$$=(2\cdot 2^2-4\cdot 2+4ln|2+1|+C)-(2\cdot 1^2-4\cdot 1+4ln|1+1|+C)=$$

$$=2+4ln|3|-4ln|2|$$

(1)En este paso hacemos el cambio de variable. Si $t=\sqrt[4]{x}$ *entonces* $x=t^4$ y por tanto $dx=4t^3dt$. Si x=1 entonces $t=\sqrt[4]{1}=1$ y si x=16 entonces $t=\sqrt[4]{16}=2$

(2)Realizamos la división entre los polinomios

$$\begin{array}{l|l} 4t^2 & t+1 \\ \hline -4t^2-4t & 4t-4 \\ \quad 4t+4 & \\ \qquad 4 & \end{array}$$

Ejercicio 3.-Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

a) **(1,5 puntos)** Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona la respuesta.

Consideramos x=precio de un lápiz, y=precio de un rotulador, z=precio de una carpeta

Atendiendo al enunciado del problema y a las condiciones de este apartado (x+7y=25) obtenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$\begin{cases} 3x+y+2z=15 \\ 2x+y+z=20 \\ x+7y=25 \end{cases}$$

Vamos a resolver el sistema realizando operaciones elementales sobre las filas de las matriz asociada.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 7 & 0 & 25 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\approx} \begin{pmatrix} 0 & -20 & 2 & -60 \\ 0 & -10 & 1 & -30 \\ 1 & 7 & 0 & 25 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\approx} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & -30 \\ 1 & 7 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

(1) F_1-3F_3 F_2-2F_3

(2) F_1-2F_2

Por tanto obtenemos el sistema equivalente: $\begin{cases} -10y+z=-30 \end{cases}$

x+7y   =25

que es un sistema compatible indeterminado. Entonces tomando y= λ   obtenemos que x=25-7 λ   z=-30+10 λ

Por tanto, las soluciones del sistema son (x,y,z)=(25-7 λ, λ, -30+10 λ) donde λ es un número real.

En este caso, no podemos deducir el precio de los artículos ya que si λ=1 entonces la solución sería (x,y,z)=(18,1,-20) lo cual es absurdo ya que esto significaría que la carpeta costaría -20 euros.

b) **(1 punto)** Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

Atendiendo al enunciado del problema y a las condiciones de este apartado (z=10x) obtenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

3x+y+2z=15

2x+y+z =20

-10x+   z =0

Vamos a resolver el sistema realizando operaciones elementales sobre las filas de las matriz asociada.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 15 \\ 2 & 4 & 1 & 20 \\ -10 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\approx} \begin{pmatrix} 23 & 1 & 0 & 15 \\ 12 & 4 & 0 & 20 \\ -10 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\approx} \begin{pmatrix} 23 & 1 & 0 & 15 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ -10 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 10 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ -10 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) F_1-2F_3 F_2-F_3

(2) F_2/4

(3) F_1-F_2

Por tanto obtenemos el siguiente sistema equivalente: $\begin{cases} 2x = 10 \\ 3x+y = 5 \\ -10x+ z=0 \end{cases}$ y de aquí se deduce que   x=10/20=0.5   y=5-3(0.5)=3.5   z=10 (0.5)=5

Por tanto la solución del sistema es (x,y,z)=(0.5, 3.5, 5) lo cual significa que el lápiz vale 0.5 euros, el rotulador 3.5 euros y la carpeta 5 euros.

Ejercicio 4.- Sean los vectores u=(1,0,1) v=(0,2,1) y w=(m,1,n)

a) **(1,25 puntos)** Halla m y n sabiendo que u, v y w son linealmente independientes y que w es ortogonal a u

Los vectores u,v y w son linealmente independientes si y solo si det(u,v,w)=0

Entonces det(u,v,w)=$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = 2n - 2m - 1 = 0$

Los vectores u y w son ortogonales si su producto escalar es 0.

Entonces $u * w = (1,0,1) * (m,1,n) = 1 \cdot m + 0 \cdot 1 + 1 \cdot n = m + n = 0$

Hay que resolver el sistema (por el método que se estime) formado por las ecuaciones

2n-2m-1=0 m+n=0

Como m+n=0 entonces m=-n y sustituyendo en la otra ecuación obtenemos que

2n-2(-n)-1=0 y de aquí se deduce que n=1/4 y, por tanto, m=-n=-1/4

b) **(1,25 puntos)** Para n=1, halla los valores de m para el tetraedro determinado por u,v y w tenga volumen 10 unidades cúbicas.

Por teoría, sabemos que el volumen de un tetredro es 1/6 del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores u,v y w, que es el valor absoluto del producto mixto ([ ]) de los tres vectores u,v y w.

Por tanto, 10=Volumen=$\frac{1}{6}|[u,v,w]|$=$\frac{1}{6}\det(u,v,w) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}$=$\frac{1}{6}|1-2m|$

Luego $|1-2m| = 60$, y teniendo en cuenta el valor absoluto obtenemos que:

1-2m=60→m=-59/2

1-2m=-60→m=6